Durée : 4 heures

Option P

I

1. Soit x une variable réelle, y une fonction réelle, dérivable, de la variable x, y' sa dérivée première. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad (\text{Arctan } x)\, y' - \frac{1}{x^2+1}\, y = (\text{Arctan } x)^2 .$$

a. Déterminer, pour x appartenant à l'un ou à l'autre des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ l'intégrale générale de (E).

b. Existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$? Si oui, les déterminer.

2. a désignant un réel quelconque, on note f_a l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f_a(x) = (x + a)\,\text{Arctan } x$ et C_a la courbe représentative de f_a dans un repère orthonormé du plan euclidien.

a. Montrer que C_{-a} se déduit de C_a par une transformation géométrique simple que l'on précisera.

On supposera, dans toute la suite du problème, que a est supérieur ou égal à zéro.

b. i. On note respectivement f'_a et f''_a les dérivées première et seconde de f_a ; calculer f'_a et f''_a et montrer que, quel que soit a, l'équation :

$$x \in \mathbb{R},\ f'_a(x) = 0$$

possède une solution unique. Étudier les variations de f_a.

ii. Déterminer les asymptotes de C_a ainsi que la position de C_a par rapport à ses asymptotes.

iii. Construire C_1. (On ne demande pas de calculer explicitement les coordonnées du point de C_1 correspondant au minimum de f_1.)

II

1. Calculer :

a. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^x (t + a)\,\text{Arctan } t\, dt$;

b. Pour $x \in [0, 2\pi]$, $\displaystyle\int_0^x |\sin t|\, dt$;

c. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^x |\sin t|\, dt$.

On exprimera ce dernier résultat en fonction de $\cos x$ et de $E\left(\frac{x}{\pi}\right)$, E désignant la fonction partie entière.

2. Soient f une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et f^* l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f^*(0) = f(0) \quad \text{et} \quad f^*(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt \quad \text{si} \quad x > 0 .$$

a. On choisit pour f la restriction à $\mathbb{R}_+$ de la fonction f_1 (f_a a été définie en I.2.). Étudier la continuité (à droite) en 0 et la dérivabilité (à droite) en 0 de f^*.

b. On choisit pour f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = |\sin t|$.

i. Montrer que f^* est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer la dérivée $(f^*)'$ de f^*.

N.B. — *La notation* Arctan *désigne la fonction « Arc tangente » également notée* Arc tg.

ii. Déterminer le nombre de solutions de l'équation :

$$x \in [0, 2\pi],\ (f^*)'(x) = 0$$

et pour chacune d'elles donner un intervalle contenant cette solution et celle-là seulement.

iii. Tracer sommairement l'arc de la courbe représentative de f^* correspondant à $x \in [0, 2\pi]$.

iv. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f^*(x)$.

III

Dans la suite du problème f et f^* ont toujours la signification précisée en II.2., c'est-à-dire que :

f est une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$

et que

f^* est l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f^*(0) = f(0) \quad \text{et} \quad f^*(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt \quad \text{si} \quad x > 0 .$$

1. Montrer que f^* est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Est-elle continue (à droite) en 0 ?

2. *a.* On suppose que f est dérivable (à droite) en 0, cette dérivée étant égale à l.

i. La fonction f^* est-elle dérivable (à droite) en 0? Si oui, déterminer la valeur de cette dérivée.

ii. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'expression :

$$x\,(f^*)'(x) + f^*(x) - f(x)$$

garde une valeur constante que l'on précisera.

iii. Montrer que, si f est monotone sur $\mathbb{R}_+$, l'expression $f^* - f$ est de signe constant sur $\mathbb{R}_+$.

iv. Déduire de ce qui précède que, si f est monotone sur $\mathbb{R}_+$, il en est de même de f^*.

b. On suppose que f a une limite finie m pour x tendant vers $+\infty$. La fonction f^* a-t-elle une limite pour x tendant vers $+\infty$? Si oui, calculer cette limite.

c. On suppose que f est périodique, de période T strictement positive. Montrer que f^* a une limite pour x tendant vers $+\infty$. Exprimer la valeur de cette limite en fonction de T et de $\displaystyle\int_0^T f(t)\, dt$.

d. α et β *désignant deux réels* ($\alpha \neq 0$), on suppose que la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est asymptote à la courbe représentative de f. Montrer que la courbe représentative de f^* admet une droite asymptote dont on déterminera l'équation.

IV

Soit C^0 l'espace vectoriel réel des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et Φ l'application de C^0 dans C^0 définie par $\Phi(f) = f^*$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de C^0. Cet endomorphisme est-il injectif? Surjectif?

2. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de Φ, et pour chaque valeur propre le sous-espace propre qui lui est associé.